Abstracta 4:2 pp.148-184, 2008

¿ES INCOHERENTE LA POSTULACIÓN DE MUNDOS POSIBLES?

José Tomás Alvarado Marambio

Abstract:

This work presents the different forms of Cantorian paradoxes that have been proposed against all the variety of forms of Actualism in the metaphysics of modality. These Cantorian paradoxes are presented in the wider context of Cantorian paradoxes directed against the notion of "world". The article presents two main general strategies to deal with the paradoxes: (i) the strategy of "amplification" and (ii) the strategy of "restriction". The first strategy is proposed as the most plausible. As the problems affect in the same way all actualist theories (and even the notion of "world"), they cannot be used against any particular actualist theory of modality. The feasibility of a general amplification strategy, on the other hand, is a reason to suppose that all those theories have not much to fear from those paradoxes.

Resumen:

Este trabajo presenta las diferentes formas de paradojas cantorianas que se han propuesto contra toda la variedad de formas de actualismo en metafísica modal. Estas paradojas cantorianas se presentan en el contexto más amplio de las paradojas dirigidas contra la noción de "mundo". El artículo presenta dos estrategias principales para neutralizar las paradojas: (i) la estrategia de "ampliación", y (ii) la estrategia de "restricción". Se defiende la primera como la más plausible. Como los problemas afectan del mismo modo a todas las teorías actualistas (e incluso a la noción de "mundo"), no pueden ser utilizados en contra de alguna teoría actualista de la modalidad en particular. La plausibilidad de una estrategia general de ampliación, por otro lado, es un motivo para suponer que ninguna de tales teorías tiene mucho que temer de tales paradojas.

Muchos filósofos han sostenido en las últimas tres décadas que la mejor forma de comprender los hechos que hacen verdaderos o falsos a los enunciados modales es como una totalidad de "mundos posibles". Cuando se dice que "p es necesario" se debe entender que p es verdadera en todos los mundos posibles y cuando se dice que "p es posible", entonces se debe entender que existe al menos un mundo posible en el que p es verdadera. ¿Qué motivos hay para pensar que esta forma de comprender las condiciones de verdad de los enunciados modales es aceptable? David Lewis es especialmente claro en este respecto:

> Creo que hay mundos posibles diferentes del que de hecho habitamos. Si se quiere un argumento, es éste. Es verdadero de manera no controvertida que las cosas podrían ser de

> otra forma de cómo son. Creo, y lo mismo usted, que las cosas podrían haber sido diferentes de incontables maneras. ¿Pero qué es lo que esto significa? El lenguaje ordinario permite la paráfrasis: hay muchas formas en que las cosas podrían haber sido además de la forma en que son actualmente. Esto es evidentemente una cuantificación existencial. Dice que existen muchas entidades que satisfacen cierta descripción, esto es, 'formas en que podrían ser las cosas'. Creo que las cosas podrían ser diferentes de incontables maneras. Creo en las paráfrasis permisibles de lo que creo. Tomando la paráfrasis tal como aparece, creo, por lo tanto, en la existencia de entidades que podrían ser llamadas 'formas en que podrían ser las cosas'. Prefiero llamarlas 'mundos posibles'.[1]

El argumento desplegado por Lewis podría ser aceptado por todo filósofo que postule mundos posibles. Por supuesto, Lewis sostiene además que esos mundos posibles diferentes del mundo actual son entidades de la misma naturaleza que el mundo actual, esto es, sumas mereológicas de todas las entidades relacionadas entre sí espacio-temporalmente, pero esto es algo que no es necesario aceptar para lo que se tratará aquí.[2] La cuestión crucial es que parece haber un motivo muy simple para aceptar que, dado que creemos que las cosas podrían ser diferentes, *hay* formas alternativas en que podrían ser las cosas. Si hay formas alternativas en que podría ser una entidad específica, como el gato Micifuz, no parece existir ninguna dificultad en pensar que hay también formas alternativas en que podrían ser *todas* las cosas: mundos posibles.

Comprender qué son los mundos posibles es comprender, por lo tanto, qué es lo que hace verdaderas o falsas a las proposiciones modales. Nos parece obvio que hay muchas proposiciones verdaderas sobre lo que podría suceder, pero si existen tales verdades (y son conocidas por nosotros), entonces debe existir algo en virtud de lo que sean verdaderas. Parece intuitivamente obvio que aquello que hace verdaderas a las proposiciones modales son las formas alternativas en que podrían darse las cosas, todas las cosas, esto es, lo que hace verdaderas o falsas a las proposiciones modales son la totalidad de mundos posibles. Esto es terreno neutral, sin embargo, entre una multitud de teorías que explican la naturaleza de esas entidades. Una forma de realismo modal extremo es la defendida por David Lewis, tal como se ha indicado. Esta concepción se denomina usualmente "posibilismo modal" y se opone a aquellas teorías que sostienen que el mundo actual no se

---

1 D. Lewis, (1973, 84).

2 D. Lewis ha complementado esta argumentación con una detallado y complejo desarrollo para justificar que los mundos posibles deben ser entendidos como él los postula y no como los postula un filósofo actualista (cf. D. Lewis, 1986). Es perfectamente posible aceptar el argumento de Lewis citado en el texto y desechar la forma idiosincrática en que Lewis explica qué son los mundos posibles.

encuentra a la par, desde el punto de vista ontológico, que toda la restante pléyade de mundos posibles. Estas teorías se denominan usualmente “actualistas”, por la preferencia ontológica dada al mundo actual. Este trabajo tiene que ver con una familia de dificultades que afectan a las teorías actualistas de la modalidad. En efecto, si se postula que, en algún sentido de la palabra, el único mundo “real” es el mundo actual, ¿cómo pueden ser comprendidos los mundos posibles? El filósofo actualista debe, de alguna manera, especificar que “existen” los mundos posibles pero sin negar la preferencia ontológica por el mundo actual. La forma más socorrida de realizar esta especificación es sosteniendo que los mundos posibles son construcciones abstractas efectuadas a partir de elementos que vienen ya dados en el mundo actual.

Por ejemplo, muchos filósofos han pensado en los mundos posibles como “historias completas” sobre cómo podría estar constituida la realidad. No se debe suponer que hay un mundo aparte del mundo actual del que sean verdaderas tales historias, tal como lo puede ser una historia infinitamente detallada y exhaustiva respecto del mundo actual. Esas historias, sin embargo, *son* los mundos posibles. Se puede pensar en tales historias como conjuntos de oraciones de un lenguaje determinado o como simplemente un conjunto de proposiciones. La forma en que estas historias llegan a describir completamente cómo podría estar constituido el mundo es porque son máximamente consistentes. Se dice que un conjunto de proposiciones S es máximamente consistente si y sólo si, para toda proposición bien formulada p, o bien $p \in S$, o bien $\neg p \in S$. La identificación de los mundos posibles con conjuntos máximamente consistentes de oraciones o proposiciones ha sido propuesta por filósofos como Carnap,[3] Jeffrey[4] y Adams.[5] El problema que será presentado afecta de una manera directa a estas concepciones de los mundos posibles asociadas a “historias completas”, pero las restantes formas de actualismo también están sujetas a paradojas de este estilo, por lo que el examen que se hará aquí tiene un valor de carácter general.

El problema surge por un resultado básico de teoría de conjuntos. Cantor probó que la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto dado es mayor que la cardinalidad de

3 Cf. R. Carnap (1947)
4 Cf. R. C. Jeffrey, (1965)
5 Cf. R. M. Adams, (1979)

ese conjunto.[6] La cardinalidad es la función que asigna a un conjunto su número de elementos. Para un conjunto A, sea su cardinalidad #A. Por otra parte, el conjunto potencia de un conjunto A, sea P(A) es el conjunto compuesto por todos los sub-conjuntos de A. En términos generales, la cardinalidad del conjunto potencia de un conjunto A, tal que #A = n, es de 2^n (esto es $[\#A = n] \rightarrow [\#P(A) = 2^n]$). Cantor estaba interesado en la generalización de este resultado para números transfinitos. Si hay una cardinalidad que pueda ser asignada al conjunto de los números naturales, esto es, $\#N = \aleph_0$, entonces se podrá definir inmediatamente un conjunto potencia del conjunto de todos los números naturales, con una cardinalidad equivalente a $\#P(N) = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Nada impide ahora que se defina el conjunto potencia del conjunto potencia del conjunto de todos los números naturales, esto es PP(N), y su cardinalidad puede ser definida como $\#PP(N) = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$. La iteración del mismo procedimiento permite generar un "paraíso" matemático de entidades todas ellas de numerosidad infinita pero no equivalente, pues, en general $\forall n\ n \leq 2^n$. Todo esto es bien conocido. Lo que tiene relevancia para la cuestión que se discute aquí es que $\#P(A) > \#A$.

Pues bien, considérese que en las concepciones actualistas que se están comentando se sostiene que un mundo posible es un conjunto máximamente consistente de proposiciones formuladas en un lenguaje. La cuestión crucial es que por cada sub-conjunto del conjunto de todas estas proposiciones existirá una proposición que o bien formará parte del conjunto, o bien su negación formará parte del conjunto. Entonces parece resultar que el conjunto máximamente consistente en cuestión tiene un número de proposiciones tan grande como su conjunto potencia, lo que va derechamente en contra del teorema de Cantor. En términos más formales, el razonamiento puede formularse así:[7]

(1) $\forall S$ [(S es máximamente consistente) $\leftrightarrow$ ($\forall q$ ($q \in S \vee \neg q \in S$) $\wedge$ (S es consistente))]

Esto es la definición de qué significa ser un conjunto máximamente consistente. Se subentiende que se trata de un conjunto de proposiciones.

---

6 Para explicaciones generales del desarrollo del punto de vista conjuntista en filosofía de las matemáticas, cf. R. Torretti, (1998), especialmente 21-47; M. Potter, (2004) especialmente 153-174, véase el teorema 9.2.6.

7 Esta explicación sigue de cerca de J. Divers (2002, 243-256).

(2) Hay un conjunto máximamente consistente de proposiciones A

(3) $\#P(A) > \#A$

(2) es la hipótesis que se va a someter a la *reductio ad absurdum* y (3) es el teorema de Cantor, aplicado al caso del conjunto máximamente consistente de proposiciones A. Ahora bien:

(4) $\forall S\ ((S \in P(A) \rightarrow \exists q\ (q \text{ versa sobre } S))$

Esto es, por cada conjunto perteneciente al conjunto potencia P(A) existirá una proposición sobre ese conjunto. En efecto, si uno de esos conjuntos es $\{q_1, q_2, q_3\}$, entonces, por ejemplo, existirá una proposición que enunciará que $q_1 \in \{q_1, q_2, q_3\}$ y otras muchas. Sea una proposición semejante r. Ahora bien, por (1) se sigue que:

(5) $(r \in A) \vee (\neg r \in A)$

Como esto vale para todo elemento de P(A), resulta que habrá tantas proposiciones en A como conjuntos pertenecientes al conjunto potencia de A, por lo tanto (por (5)) se sigue que:

(6) $\#P(A) \leq \#A$

Pero (6) está en abierta contradicción con (3). Hay, por lo tanto, una línea de razonamiento que conduce desde las premisas (1) a (4) a una contradicción. Debe rechazarse una de estas premisas. No es plausible rechazar la definición de conjunto máximamente consistente de proposiciones (1), tampoco es razonable rechazar el teorema de Cantor (3). Las opciones abiertas son la suposición (2) de que hay un conjunto máximamente de proposiciones A, o bien de que hay al menos una proposición por cada sub-conjunto del conjunto potencia de A, esto es (4). Como (4) es plausible por motivos independientes, parece que se debe rechazar (2). Esto es, pareciera que la idea de que hay conjuntos máximamente consistentes de proposiciones está en contra de la teoría de conjuntos y debe ser rechazada.

Este trabajo tratará de explorar formas de resolver esta aporía para diversas concepciones actualistas. Para esto, se van a considerar, en primer lugar, las diferentes formas de aporía y cómo es que afectan a las diversas formas de actualismo. En segundo lugar, se van a considerar estrategias generales de solución de las aporías. Se va a argumentar aquí que: (i) las paradojas cantorianas no afectan de manera específica a una u otra teoría modal actualista, sino que se trata de dificultades que afectan por igual a cualquier concepción que utilice –de algún modo– la noción de "mundo"; (ii) dado lo anterior, las paradojas cantorianas requieren un tratamiento general. Para este tratamiento general se va a sostener que lo más razonable es sostener que realmente el "mundo" no es un conjunto; tampoco deben concebirse como conjuntos las otras "construcciones" actualistas que se suelen aducir para entregar mundos posibles. Esto es, la teoría de conjuntos debe ser vista como una teoría matemática interesante, pero no como nuestra ontología fundamental. Junto con considerar la estrategia indicada, se explicará porqué las estrategias de "restricción" no parecen aceptables.

1. Diversas formas de la aporía cantoriana

No existe, en realidad un único problema proveniente de las consideraciones de cardinalidad cantorianas. Se trata de una entera familia de problemas que afectan no sólo a las concepciones actualistas de mundos posibles sino también a postulaciones metafísicas de carácter completamente general. Grim, uno de los filósofos que ha explotado con mayor profusión esta familia de dificultades señala que argumentaciones análogas a la desplegada arriba afectan a la idea de que existe un conjunto de todas las verdades, a la idea de que existe un conjunto de todas las verdades necesarias, de que existe un conjunto de todas las falsedades y de que existe un conjunto de todas las cosas conocidas por un ser omnisciente.[8] Bringsjord ha planteado la misma dificultad respecto de conjuntos de todos los estados de cosas o hechos.[9] Chihara, por su parte, ha desarrollado argumentos contra la idea de que existe un conjunto de todos los estados de cosas posibles y contra la idea de que

[8] Grim ha presentado estas dificultades en una serie de escritos: P. Grim, (1984, 206-208; 1986, 186-191; 1997, 146-151)

[9] Cf. S. Bringsjord (1985, 64; 1989, 186-189).

existe un conjunto de todas las esencias.[10] Será conveniente considerar estas formas diferentes de argumentación.

(A) No existe un conjunto de todas las verdades. Supóngase –para efectuar una *reductio ad absurdum*– que hubiese un conjunto de todas las verdades, sea $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Existe una cardinalidad de este conjunto de todas las verdades $\#A = k$. Resulta, sin embargo, que a cada sub-conjunto perteneciente a A puede asignársele una proposición verdadera. Por ejemplo, si $B \subseteq A$, es el conjunto $\{p_{i-1}, p_i, p_{i+1}\}$, entonces existe al menos una verdad como $p_1 \notin B$. Esta verdad ha de formar parte del conjunto A, pues es –en efecto– el conjunto de todas las verdades. Pero entonces, el conjunto de todas las verdades tiene tantos elementos como el conjunto potencia de A, P(A). Así, resulta $\#A \geq \#P(A)$, en contradicción con el resultado de Cantor.

Esta misma forma de razonamiento, que no tiene que ver de manera especial con mundos posibles, permite mostrar que no hay un conjunto de todas las verdades necesarias, no hay un conjunto de todas las falsedades ni un conjunto de todas las verdades conocidas por un ser omnisciente. Para el caso de verdades necesarias, toda la diferencia viene de que el conjunto A estará restringido. Cada sub-conjunto tendrá trivialmente asignada otra proposición verdadera y necesaria, pues la pertenencia de cada proposición verdadera a un sub-conjunto dado es un hecho necesario. Para el caso del conjunto de todas las falsedades, A estará compuesto por todas las negaciones del conjunto que ha entrado en el argumento central sobre las verdades. A cada sub-conjunto se le puede asignar una proposición falsa (por ejemplo, si un sub-conjunto de A es $\{p_1, p_2\}$, entonces se puede formular una falsedad enunciando que $p_1 \notin \{p_1, p_2\}$) y el argumento vuelve a funcionar de la misma manera. Por último, en el caso de todas las proposiciones verdaderas conocidas por un ser omnisciente, el argumento funciona porque el ser omnisciente, precisamente por serlo, deberá también conocer de cada sub-conjunto de A que es un sub-conjunto de A.

(B) No existe un conjunto de todos los estados de cosas o hechos. Se trata éste de un argumento muy semejante a (A), pues los estados de cosas o hechos se conciben ordinariamente como aquello que hace verdadera (o falsa, según sea el caso) a una

---

[10] Cf. Ch. Chihara, (1998, 126-127; 130-131).

proposición. Si hay un argumento para las verdades, entonces, parece obvio que habrá un argumento para aquellas entidades que están correlacionadas con las proposiciones verdaderas. Pues bien, sea A el conjunto de todos los estados de cosas del mundo. A cada sub-conjunto de A se le podrá asignar un nuevo estado de cosas. Por ejemplo, si hay un sub-conjunto $B = \{S_1, S_2\}$, entonces hay también un estado de cosas S_3 constituido por el hecho de que S_1 pertenece al conjunto B (o, simplemente, al hecho de ser B el conjunto compuesto por S_1 y por S_2). Nótese cómo este argumento parece implicar el rechazo de la idea de un "mundo" constituido por todos los estados de cosas.

(C) No existe un conjunto de proposiciones o de oraciones máximamente consistente. El razonamiento es tal como se detalló arriba. Éste es el argumento que parece atacar directamente a las concepciones actualistas que funcionan con "historias completas".

(D) No existe un conjunto de todos los estados de cosas posibles. Se trata de una variación sobre (B) que está referido al conjunto de todos los estados de cosas actuales. Sea el conjunto de todos los estados de cosas posibles A. A cada sub-conjunto de A podrá asignársele un estado de cosas posible. Por ejemplo, si $B \subseteq A$ está compuesto por $\{S_1, S_2\}$, entonces hay un estado de cosas posible consistente en que $S_1 \in B$. Este argumento parece ir directamente contra la forma de concebir los mundos posibles postulada por Plantinga como estados de cosas posibles máximos, tal como se indicará a continuación.

(E) No existe un conjunto de todas las esencias. Éste es también un argumento que ha sido dirigido contra la concepción modal de Plantinga en la que las entidades posibles no-actuales están representadas por una esencia (que no se encuentra instanciada). La esencia es aquí un conjunto de propiedades que son satisfacidas por un y sólo por un individuo en todos los mundos posibles. Debe suponerse que hay esencias individuales no sólo para objetos sino también para estados de cosas. Esto es, a cada estado de cosas, sea actual o meramente posible, se le asigna una propiedad que es satisfacida por ese estado de cosas y por nada más en todos los mundos posibles. Por ejemplo, si se quiere especificar la esencia individual del estado de cosas consistente en que el gato Micifuz es gordo, se puede perfectamente definir una propiedad consistente en ser algo al mismo tiempo Micifuz y gordo. Esto es, si M es la esencia individual del gato Micifuz y G es la propiedad de ser gordo, entonces existe la propiedad de $[\lambda x\ (Mx \wedge Gx)]$. Es trivial, entonces, que pueden ser definidas todas estas esencias individuales para estados de cosas si es que hay esencias individuales para los objetos que constituyen tales estados de cosas. Sea ahora un conjunto A de todas las esencias individuales. A cada sub-conjunto de A puede asignarse una esencia individual. En efecto, sea un conjunto $B \subseteq A$, compuesto por $\{E_1, E_2\}$, en que E_1 y E_2 son esencias individuales. Supóngase que $E_1 = [\lambda x\ (Mx \wedge Gx)]$ y que $E_2 = [\lambda x\ (Nx \wedge Fx)]$ (por ejemplo, E_1 es la esencia individual del estado de cosas de ser Micifuz gordo y E_2 es la esencia individual de ser Tom feroz), entonces es trivial que existe una esencia individual $E_3 = [\lambda x \lambda y\ ((Mx \wedge Gx) \wedge (Ny \wedge Fy))]$ (esto es, la esencia individual del estado de cosas de ser Micifuz gordo y Tom feroz). Resulta, por lo tanto, que hay tantas esencias individuales como sub-conjuntos del conjunto de todas las esencias individuales. Esto genera la paradoja cantoriana inmediatamente.

(F) No existe el conjunto de todas las entidades. Este argumento no ha sido formulado con anterioridad, pero es una aplicación bastante obvia. Supóngase simplemente que a nuestra ontología se añade un principio de mereología del siguiente tenor: si hay dos objetos diferentes x e y, entonces existe la suma mereológica $(x + y)$. Se trata de un principio plausible intuitivamente. Ahora bien, sea A el conjunto de todas las entidades del mundo, tal que $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. A cada sub-conjunto de P(A) se le puede asignar una entidad específica constituida por la suma mereológica de todas las entidades que son miembros de ese sub-conjunto. De acuerdo al principio mereológico indicado, esas entidades son también entidades del mundo y han de formar parte del conjunto A. Resulta, entonces, que A parece tener tantos elementos como su conjunto potencia en contra de lo establecido por el teorema de Cantor.

(G) No existe el conjunto de todos los universales. Este argumento tampoco ha sido formulado con anterioridad. Supóngase que existiese un conjunto de todos los universales $A = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. Existe un conjunto potencia de A, P(A) cuya cardinalidad debe ser superior a la cardinalidad de A. Pero por cada sub-conjunto de A puede definirse un universal complejo. Por ejemplo, dado $B \subseteq A$, tal que $B = \{U_1, U_2\}$, entonces hay un universal que consiste en la instanciación conjunta de U_1 y de U_2, esto es $[\lambda x\ (U_1x \wedge U_2x)]$. Sucede entonces que hay tantos universales como sub-conjuntos del conjunto A, pero todos esos universales pertenecen a A, en contra del resultado de Cantor.

Tal como se puede apreciar, entonces, las paradojas cantorianas parecen afectar a las concepciones modales actualistas de diversos modos y también a ciertas ideas fuertemente arraigadas en la tradición filosófica.[11] Pareciera, en efecto, que fuese inconsistente pensar en el *mundo* como el conjunto de todos los estados de cosas o hechos, pensar también en un conjunto de todas las proposiciones que son hechas verdaderas en virtud de esta totalidad de estados de cosas y pensar que estas totalidades de hechos y de proposiciones verdaderas pudiesen ser conocidas por una entidad que conoce "todo". Si se quiere, el problema no afecta a las concepciones modales actualistas por el hecho de tratarse de teorías específicamente modales, sino que el problema parece provenir de la representación de los hechos modales mediante *mundos* posibles. Pruritos semejantes al que parecen plantear estas paradojas cantorianas han hecho que tradicionalmente los lógicos rechacen la cuantificación irrestricta sobre *todas* las entidades existentes. Es un resultado característico de teoría de conjuntos que no existe un conjunto universal compuesto por todos los conjuntos y, del mismo modo, pareciera que estos mismos principios que obligaron al desarrollo de la concepción iterativa de conjunto, conducen a una restricción fundamental en nuestras ontologías, pues parece que debemos aceptar que no existe el *todo*, no hay *universo*.[12] Así, si no resulta coherente hablar de todos los estados de cosas actuales ni de todas las proposiciones actualmente verdaderas, no es nada extraño que tampoco parezca coherente hablar de todos los estados de cosas posibles o de todas las proposiciones pertenecientes a un conjunto máximamente consistente de proposiciones. De esta manera, las paradojas cantorianas parecen exigir un tratamiento unitario y de carácter general, que

---

[11] Se ha omitido en este conjunto de paradojas cantorianas una forma atribuida a David Kaplan que afecta la suposición de que existe una totalidad de mundos posibles. Esta paradoja está formulada en M. Davies (1981, 262). También se pueden consultar formulaciones en M. Jubien, (1980); D. Kaplan, (1973). El argumento es satisfactoriamente contestado por David Lewis (1986, 104-108).

[12] Por supuesto, esto no impide que utilicemos ordinariamente las cuantificaciones universales en nuestros discursos ordinarios, pero suponiendo siempre –tal como lo han advertido casi todos los lógicos– que esas cuantificaciones universales se encuentran tácitamente restringidas a un dominio de entidades determinado. El problema que se plantea aquí no es que no pueda usarse la expresión "todo" en esos sentidos ordinarios restringidos tácitamente a un cierto dominio sobre el que se habla. El problema surge para un uso irrestricto de "todo".

es lo que se va a proponer aquí. Ha sido frecuente en la literatura dedicada de manera específica a cuestiones de metafísica modal que se proponen soluciones especiales para tal o cual tipo de paradoja cantoriana. Este enfoque es, al parecer, equivocado: no hay teorías actualistas inmunes a los problemas de cardinalidad; no hay tampoco concepciones ontológicas sobre el "mundo" que se encuentren libres de estas dificultades. La solución –o soluciones– deberán ser aplicables a todas estas concepciones por igual. En efecto, todas las concepciones modales que se están considerando explican los hechos modales por apelación a una totalidad de mundos posibles que son "formas alternativas en que podría estar constituido el mundo", aunque difieran entre sí en cómo se concibe la naturaleza de estas "formas alternativas". Siempre, en todo caso, los mundos posibles son especificaciones de cómo podría ser el *mundo*. Luego, si hay mundos posibles hay un mundo actual (en el caso de Lewis, hay sencillamente "mundos" en plural). Si los argumentos (A), (B) y (F) ponen en cuestión la existencia de un mundo como conjunto de todas las verdades, conjunto de todos los estados de cosas o conjunto de todas las entidades existentes, entonces estos argumentos cantorianos serán un motivo para negar que exista una pluralidad de mundos posibles. Tal como se ha indicado más arriba, no porque exista alguna dificultad particular en la forma en que vienen concebidos tales mundos posibles, sino sencillamente porque deben utilizar una categoría conceptual incoherente. Tácitamente las concepciones actualistas (y las posibilistas también) están suponiendo que hay una totalidad, el mundo, que podría ser diferente. Los argumentos cantorianos mostrarían que no hay tal entidad (el mundo) y no puede existir, por lo que tampoco hay formas alternativas en que podría darse esa entidad. El problema, por lo tanto, tiene un carácter absolutamente general, y no está restringido a la metafísica modal.

2. Las aporías cantorianas y las diferentes formas de actualismo

¿Cómo afectan estas distintas paradojas cantorianas a las teorías actualistas? Las teorías actualistas se suelen clasificar en cuatro grandes grupos: (i) la teoría lingüística (o proposicional), (ii) la teoría de Plantinga, (iii) la teoría combinatoria, y (iv) la teoría de los mundos posibles como propiedades.[13] Se verá aquí que no hay ninguna teoría actualista que muestre ventajas por lo que respecta a los problemas de cardinalidad.[14]

(i) Teorías lingüísticas. Tal como se ha indicado más arriba, es característico de estas concepciones modales que los mundos posibles sean concebidos como "historias completas" de cómo podría estar constituida la realidad. No se trata de aquello que haría verdaderas a tales historias sino de las historias mismas. Si hay una especificación completa de cómo podría estar dado el mundo, descendiendo hasta el más mínimo detalle para cada instante de tiempo, entonces todo lo que se quisiera que estuviese contenido en el mundo, si es que las cosas fuesen diferentes de cómo lo son actualmente, estará reflejado en alguna peculiaridad de la "historia completa". Para construir la historia completa se puede utilizar un lenguaje determinado o bien se puede apelar a un conjunto de proposiciones. En principio, el recurso a proposiciones puede resultar más apropiado pues es dable esperar que las proposiciones no tengan las limitaciones expresivas que pueden afectar a nuestros lenguajes naturales y artificiales.[15] Si se hace apelación a un lenguaje natural como el español para la construcción de historias "completas", por ejemplo, es obvio que resultarán inadecuaciones importantes, pues en español no tenemos nombres para cada entidad existente (y mucho menos para cada entidad posible no existente actualmente).

Tal como se ha indicado más arriba, la forma en que típicamente se consigue especificar una "historia completa" es tomando cada oración o proposición bien formada del lenguaje en cuestión y añadiendo o bien la oración (o proposición) o bien su negación a un conjunto consistente. Este procedimiento generará una totalidad de conjuntos máximamente consistentes de oraciones o proposiciones que serán las entidades que cumplirán aquí el papel de mundos posibles. Un estado de cosas es actual si y sólo si la proposición que expresa el darse de tal estado de cosas es verdadero. El mundo actual viene dado por el conjunto máximamente consistente de oraciones y proposiciones en el que

---

13 Para esta clasificación, cf. J. Divers (2002, 169-180).

14 Si el lector está ya persuadido de que todas las diferentes teorías actualistas están afectadas por igual por paradojas cantorianas puede dispensarse de leer esta sección y pasar directamente a la siguiente donde se tratan las estrategias generales de solución.

15 Puede extrañar el que se incluya entre las teorías lingüísticas las construcciones de conjuntos máximamente consistentes de proposiciones. Esta agrupación está motivada por el hecho de que las "historias completas" formadas por oraciones y las "historias completas" formadas por proposiciones poseen una estructura semejante.

todos sus elementos son verdaderos. Un estado de cosas es posible si y sólo si la proposición que expresa el darse de ese estado de cosas pertenece al menos a un conjunto máximamente consistente. Un estado de cosas es necesario si y sólo si la proposición que expresa el darse de tal estado de cosas pertenece a todos los conjuntos máximamente consistentes. Esta forma de concebir los mundos posibles es simple y elegante y, tal vez por ello, ha resultado atractiva para muchos filósofos que siguen trabajando en la depuración de una u otra forma de teoría lingüística.[16]

Las teorías de este estilo, sin embargo, se encuentran directamente afectadas por las paradojas cantorianas (que pueden ser adaptadas para conjuntos máximamente consistentes de oraciones o para conjuntos máximamente consistentes de proposiciones) de la forma (C). Parece obvio que por cada sub-conjunto del conjunto máximamente consistente que se encuentre describiendo cómo está constituido el mundo, existirá una oración o proposición que esté enunciando algo verdadero o que podría ser verdadero, si ese mundo fuese actual. Las teorías lingüísticas se encuentran, por lo tanto, directamente afectadas por las paradojas cantorianas.

(ii) Teorías combinatorias.[17] En las teorías combinatorias los mundos posibles vienen concebidos como construcciones dadas a partir de un conjunto de elementos que se encuentran ya dados en el mundo actual. Estos elementos son básicamente objetos y propiedades. En el mundo actual los objetos y propiedades constituyen estados de cosas o hechos que hacen verdaderas a las proposiciones que enuncian el darse de tales estados de cosas. La idea general es que esos mismos objetos y propiedades podrían estar combinados de otros modos, esto es, que los mismos objetos que ya existen en el mundo actual podrían instanciar otras propiedades y relaciones, configurando, por lo tanto, otros estados de cosas diferentes de los existentes en el mundo actual.[18] Dado un conjunto de todos los objetos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y un conjunto de todas las propiedades $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ puede definirse un conjunto de todos los estados de cosas posibles como el conjunto de todos los pares ordenados (o n-tuplas ordenadas, según sea el caso) de objetos y propiedades $\{\langle P_1, x_1\rangle,$

[16] Cf. T. Roy (1995); J. Melia (2001), 19-29; Th. Sider (2002).

[17] Defensores de concepciones modales combinatorias son D. M. Armstrong (1989), véase en particular 37-53; M. J. Cresswell (1979).

[18] Naturalmente, filósofos que se encuentran inclinados a reemplazar objetos y propiedades por tropos especificarán los estados de cosas de manera diferente, pero la idea central será la misma.

$<P_1, x_2>, \ldots, <P_1, x_n>, <P_2, x_1>, <P_2, x_2>, \ldots, <P_2, x_n>, \ldots, <P_n, x_1>, <P_n, x_2>, \ldots, <P_n, x_n>\}$. Pues bien, dado un conjunto de todos los estados de cosas (independientes entre sí) pueden definirse la totalidad de mundos posibles como la totalidad de todas las combinaciones posibles de estados de cosas. Utilizando un ejemplo elemental se puede apreciar cómo se especifican estos mundos posibles: sean los estados de cosas S_1 y S_2 (si se quiere, los que resultan del poseer un único objeto dos propiedades diferentes), entonces hay cuatro mundos posibles, a saber $\{S_1, S_2\}$, $\{S_1, \text{no-}S_2\}$, $\{\text{no-}S_1, S_2\}$, $\{\text{no-}S_1, \text{no-}S_2\}$. En la concepción combinatoria los conjuntos de objetos y propiedades vienen tomados de los objetos y propiedades actualmente existentes.

Estas concepciones combinatorias resultan directamente afectadas por los argumentos cantorianos de la forma (D), pues deben hacer apelación al conjunto de todos los estados de cosas posibles, en el que deben incluirse estados de cosas correspondientes a cada sub-conjunto de tal conjunto.

(iii) La teoría de Alvin Plantinga. Plantinga define a los mundos posibles como estados de cosas posibles máximos.[19] No da demasiadas indicaciones sobre qué debe entenderse por un "estado de cosas", pero tiene que suponerse que su concepción no puede diferir demasiado de la usual en la que los estados de cosas: (a) vienen dados por la complexión de objetos y propiedades, y (b) son las entidades que hacen verdaderas (o falsas) a las oraciones o proposiciones. Un estado de cosas "posible" ha de ser un estado de cosas que, aun cuando no sea efectivo, podría serlo. Se dice, por otro lado, que un estado de cosas S es "máximo" si y sólo si para todo estado de cosas S*, o bien S incluye a S*, o bien S excluye a S*. S incluye a S*, si y sólo si, necesariamente si S es efectivo entonces S* es efectivo. S excluye a S* si y sólo si no es posible que se den conjuntamente S y S*. Un estado de cosas máximo, tal como lo entiende Plantinga, es un estado de cosas que ha de incluir toda determinación o hecho que podría constituir una forma alternativa en que podría estar constituido el mundo y, por ello, Plantinga lo identifica con un mundo posible. Plantinga añade a la noción de estado de cosas posible y máximo la noción de "libro" de un mundo. Dado un mundo posible existirá un conjunto de proposiciones verdaderas sobre lo que

19 Cf. A. Plantinga (1974, 44-51; 2003, 103-121).

ocurre en tal mundo posible. Este conjunto de proposiciones verdaderas sobre tal mundo es lo que se denomina aquí el "libro" de ese mundo.

La concepción de Plantinga está afectada por las paradojas cantorianas de varias maneras. En primer lugar, Plantinga parece requerir un conjunto de todos los estados de cosas posibles (es aquello sobre lo que parece estar cuantificando su definición de un "estado de cosas máximo", así como las definiciones de "inclusión" y "exclusión"), lo que hace a su concepción sensible al argumento (D). En segundo lugar, aún cuando Plantinga no concibe a los mundos posibles como conjuntos de proposiciones, sí sostiene que esta asociado a cada mundo posible un conjunto de proposiciones que debe ser máximamente consistente. Los "libros" son susceptibles de caer en paradojas cantorianas de la forma (C) del mismo modo que la concepción modal lingüística. En tercer lugar, la concepción de Plantinga se exime de objetos posibles mediante la utilización de un conjunto de esencias individuales. La postulación de un conjunto de esencias individuales, sin embargo, parece estar afectada por paradojas cantorianas de la forma (E).

(iv) La teoría modal basada en propiedades o universales.[20] En esta concepción modal los mundos posibles son concebidos como propiedades o universales estructurales que especifican cómo estaría constituido el mundo si es que las cosas fuesen diferentes. Un universal estructural es un universal –esto es, una cierta determinación que es apta por su naturaleza para ser predicada de muchos– que surge por la complexión de otros universales más básicos. Por ejemplo, el universal "molécula de agua" se instancia por algo en el que hay tres partes, una de la cuáles instancia el universal "átomo de oxígeno", dos de las cuales instancian el universal "átomo de hidrógeno" y estas tres partes se encuentran relacionadas entre sí instanciando otro universal relacional. La idea general es que un mundo posible –una forma posible en que podría estar constituido el mundo– vendría dado por un universal estructural altamente complejo en el que se encontraría dado con todos sus detalles cada determinación que podría tener ese mundo. En esta concepción, la diferencia entre el mundo actual y los restantes mundos posibles es que el mundo actual es el único que se encuentra instanciado. Los restantes mundos posibles son universales que no están

[20] Cf. R. Stalnaker (2003); P. Forrest (1986) éste es también el tipo de teoría modal que he defendido, cf. J. T. Alvarado (2006).

instanciados (pero que podrían estarlo). Un estado de cosas S es posible si y sólo si, existe al menos un universal estructural máximo U, tal que, si U fuese instanciado, entonces S se daría. Por otra parte, un estado de cosas S es necesario si y sólo si, para todo universal estructural máximo U, si U es instanciado, entonces S se daría. Resulta crucial para la identificación de un mundo posible con un universal estructural que el universal en cuestión sea, en algún sentido de la palabra, "máximo". ¿Cómo se entiende aquí la "maximalidad"? Ya se ha visto cómo nociones semejantes deben aparecer en las teorías modales lingüísticas y en la teoría de Plantinga. En las primeras, porque se deben utilizar conjuntos *máximamente* consistentes de proposiciones (esto es, tales que para todo p, o bien p pertenece al conjunto, o bien ¬p pertenece al conjunto) y en la segunda, porque se debe utilizar la noción de un estado de cosas posible *máximo* (esto es, tal que para todo estado de cosas S, o bien se incluye a S o bien se excluye a S). La noción de maximalidad que aparece en estas teorías genera problemas, como se ha visto. En el caso de la teoría modal basada en universales la idea es que un mundo posible es un universal estructural "máximo" porque describe exhaustivamente como sería el mundo en la posibilidad contemplada. El universal en cuestión es capaz de codificar cómo es que sería el mundo porque: (a) es una especificación de un individuo "máximo", esto es, de un individuo tal que todo individuo es parte de él. Formalmente, se puede definir así un individuo máximo:

(7) $\forall x$ [(x es máximo) $\leftrightarrow \forall y$ (y es parte de x)]

Recuérdese que en mereología todo objeto es parte de sí mismo, aún cuando no sea parte propia de sí mismo. Trivialmente, entonces el "mundo", que es lo que intuitivamente debe entenderse como el individuo máximo,[21] es parte de sí mismo. La especificación del individuo máximo es (b) exhaustiva, en el sentido de que, dado un conjunto de *todos* los universales $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ se atribuirá a cada parte, ya sea el universal P_i, o se le atribuirá que no instancia ese universal P_i (para un universal $P_i \in \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, naturalmente). La forma, entonces, en que un universal estructural llega a ser máximo es porque especificará

[21] No hay más que un individuo máximo, pues dos individuos son idénticos si y sólo si poseen exactamente las mismas partes. Cualquier cosa que satisfaga en un mundo posible la definición (7) va a coincidir con cualquier otra que también lo haga.

cada determinación que posea cada parte de un mundo posible, mediante cláusulas de este tenor:

(8) $\lambda x \exists y\ [(y \text{ es parte de } x) \wedge (P_1 y \wedge P_2 y \wedge \ldots \wedge P_n y)]$

En otras palabras, un mundo posible viene dado por una descripción exhaustiva de todas sus partes. A su vez, las partes de que se compone un mundo posible pueden ser codificadas completamente con la especificación completa de cada una de sus partes, y luego con la especificación completa de cada una de las partes de esas partes, etc. Es perfectamente aceptable, entonces que en la serie de universales P_1, P_2, …, P_n que aparece en (8) se encuentren otras cláusulas que tengan la misma forma de (8). Como puede apreciarse, podría suceder que la codificación de un mundo posible (como el mundo actual) se realice por un universal infinitamente complejo, por ejemplo, si es que las partes sólo se pueden codificar con la especificación de sus partes y éstas, a su vez, mediante la especificación de sus respectivas partes, y luego éstas otras deben remitir a sus partes, y a las partes de las partes, y a las partes de las partes de las partes, etcétera. Puede ser que el universal estructural máximo sea tan complejo que no resulte expresable por ninguna fórmula de un lenguaje natural o artificial nuestro, incluso siendo infinitario. Esto no tiene ninguna importancia. Un universal es un tipo de entidad que puede ser o no conocida por nosotros y puede o no ser cognoscible por nosotros, sin que esto limite su existencia de alguna manera.

Pues bien, ¿cómo pueden afectar las paradojas cantorianas a la teoría modal basada en universales? En primer lugar, se ve afectada esta teoría por argumentos de la forma de (E), esto es, argumentos que rechazan la existencia de un conjunto de todas las esencias. En la teoría modal basada en universales, en efecto, no pueden aparecer “objetos posibles”. Naturalmente que hay objetos existentes en el mundo actual, pero nada más. Los mundos posibles son simples universales no instanciados (con una única excepción) y si un universal es tal que si fuese instanciado resultaría que Micifuz sería gordo, entonces Micifuz debe aparecer ahí representado por su esencia individual y no *propia persona*, por decirlo de algún modo. Del mismo modo, entonces, que en la teoría de Plantinga, en esta teoría modal se tienen que utilizar esencias individuales como el dominio sobre el que se cuantifica en los enunciados modales. Tal como se ha indicado más arriba, la idea general es que un estado de cosas como el ser Micifuz gordo puede incluirse como una cláusula integrante de un universal estructural máximo, pues hay un universal (estructural, naturalmente) que consistirá en ser el gato Micifuz, sea M, y habrá otro universal estructural consistente en ser gordo, sea G, por lo que puede definirse el universal de ser algo Micifuz y gordo, esto es: $[\lambda x\ (Mx \wedge Gx)]$. La utilización de un conjunto de esencias individuales genera una paradoja cantoriana del tipo (E).

Un segundo problema de tipo cantoriano mucho más obvio para la concepción modal basada en universales es la del tipo (G), pues debe hacerse apelación –o eso parece– al conjunto de todos los universales y a construcciones de universales complejos a partir de otros universales más simples. Parece, por lo tanto, que puede generarse un universal complejo o estructural por cada subconjunto del conjunto de todos los universales, según se ha explicado arriba.

3. Estrategias generales de solución

¿Qué es lo que genera las paradojas cantorianas? En primer lugar se selecciona una cierta totalidad (todas las verdades, todos los estados de cosas, todas las esencias, todas las proposiciones de un conjunto máximamente consistente, todos los estados de cosas posibles, etc.). En segundo lugar, sucede que la totalidad seleccionada es "productiva" en el sentido de que dado un conjunto cualquiera de miembros, siempre pueden añadírsele nuevos miembros. La paradoja cantoriana surge porque se supone que un conjunto determinado posee cierta "fijeza" en sus miembros (sea finito o infinito, y si es infinito, sea numerable o indenumerable). Dado un conjunto "fijo", se determina ahora su conjunto potencia que ha de tener una cardinalidad o numerosidad mayor. El problema aquí es que la totalidad seleccionada, al ser "productiva", no tiene la "fijeza" que se requiere de un conjunto para que entre en la estructura iterativa. El teorema de Cantor permite discriminar entre conjuntos infinitos porque, aun tratándose de "totalidades" infinitas se les puede asignar cierta determinación en sus elementos (lo que en teoría de conjuntos es la determinación del conjunto en cuestión: las condiciones de identidad de un conjunto son estrictamente extensionales, pues dos conjuntos con los mismos elementos *son* el mismo conjunto). Una vez dado un conjunto, esto es, una cierta totalidad de elementos determinada, puede definirse un conjunto de todos los sub-conjuntos del primero. Esto supone que la totalidad en cuestión está "ya dada". En las totalidades que generan las paradojas cantorianas, en cambio, sucede que la totalidad en cuestión nunca está "dada" completamente. La totalidad en cuestión "genera" nuevos miembros de sí misma. Esto es lo que puede ser denominado su carácter "productivo". Se trata, entonces, de dos supuestos:

(I) Se postula un *conjunto* dado A.

(II) Hay un principio generador tal que a cada sub-conjunto de A se le puede asignar un elemento de A.

La conjunción de (I) y (II) lleva a una contradicción patente con el resultado de Cantor según el cual la cardinalidad del conjunto potencia de A es mayor que la cardinalidad de A, cualquiera sea la cardinalidad de A. Las formas generales de resolver la paradoja son básicamente dos y se encuentran relacionadas directamente con los dos supuestos de tipo (I) y (II) que se encuentran en la estructura de toda aporía cantoriana. Estas estrategias son las siguientes: (a) estrategias de "ampliación" que consisten en la negación de (I), afirmando que existe una "totalidad" determinada A, pero *no* se trata de un conjunto. Se dice aquí que se trata de una estrategia de "ampliación" pues, de alguna manera, busca ampliar las formas en que puede ser dada cierta totalidad de elementos, no restringiéndolas a lo que viene dado en la teoría de conjuntos; y (b) estrategias de "restricción" que consisten en la negación de (II), tratando de neutralizar el principio generador que produce la aparición de elementos "nuevos" de A por cada sub-conjunto de A.[22] Se examinarán ahora por separado cada una de estas estrategias generales y se argumentará que mientras la estrategia (b) no es recomendable como solución general, sí lo es la estrategia (a).

22 Otros autores han presentado aquí tres estrategias generales de ataque a las paradoja cantorianas. Por ejemplo, J. Divers (2002, 249-256) distingue entre soluciones de "restricción", de "clases propias" (que no son conjuntos) y de "no maximalidad". Aquí se toman lo que Divers denomina soluciones de "restricción" y de "no-maximalidad" como estrategias generales de restricción en el sentido (b) que se ha indicado. Se trata, en efecto, de estrategias que buscan impedir la operación del principio generador.

3.1. *Estrategias de ampliación*

Tal como presentan la cuestión los propugnadores de las paradojas cantorianas, la teoría de conjuntos, un cuerpo de teoría matemática utilizado como "fundamento" en todas las áreas de la matemática, pareciera decirnos que no existe el "mundo", tal como usualmente lo entendemos. En efecto, hay paradojas cantorianas que, tal como se ha visto, muestran, o mostrarían, que no existe el conjunto de todas las verdades, no existe el conjunto de todos los estados de cosas, no existe el conjunto de todos los objetos (y el conjunto de todas las propiedades) y luego, no es extraño que se declaren también inexistentes el conjunto de todas las proposiciones de un conjunto máximamente consistente (que describe cómo podría ser el mundo), el conjunto de todos los estados de cosas posibles y el conjunto de todas las esencias individuales. ¿Qué motivo tenemos para aceptar lo que parecen mostrar estas paradojas cantorianas? Como sucede ordinariamente con las paradojas auténticas, estas líneas de argumentación dejan la sensación de que lejos de mostrar que algo está mal con la idea de "mundo" (y con las variadas formas de comprender a los mundos posibles), muestran que algo anda mal con las premisas que han conducido a este resultado increíble. Pues es ciertamente increíble que no exista el mundo por tal o cual teorema ingenioso de Cantor, tal como resulta increíble pensar que no hay movimiento por las paradojas de Zenón. El desafío, más bien, es detectar qué es lo que está produciendo que nociones perfectamente aceptables para nuestra comprensión ordinaria aparezcan como incoherentes. Siempre aquí quedará abierta la posibilidad de aplicar un *modus tollens* en vez de un *modus ponens* (o al revés), si es que teoría de conjuntos y nuestra noción ordinaria de mundo se muestran incompatibles de manera irreparable. Esto es exactamente lo que se hará aquí.

Las estrategias de ampliación que aquí se comentan han estado inspiradas por el hecho de que en ciertas teorías axiomatizadas de conjuntos expresamente se deja espacio para ciertas totalidades que no son conjuntos y que han sido denominadas "clases". Como es bien conocido, existen dos grandes formas alternativas de axiomatizar la teoría de conjuntos,[23] una de estas formas es obra de Zermelo y Fraenkel (conocida usualmente como ZF) y la otra es obra de von Neumann, Bernays y Gödel (conocida usualmente como NBG). En NBG existe el concepto de una "clase" que puede no ser un conjunto. Una clase que no es conjunto se denomina ordinariamente una "clase propia". Von Neumann, en

[23] Cf. R. Torretti (1998, 71-111); M. Potter (2004, 312-316).

particular define a los conjuntos como una especie de clase y, con ello, deja la puerta abierta para postular clases de objetos que son "demasiado grandes" para ser un conjunto, como la clase de todos los objetos y de todos los conjuntos. Cantor había hablado, en cambio, de pluralidades consistentes y pluralidades "inconsistentes", esto es, exactamente las pluralidades demasiado grandes para las operaciones conjuntistas.

> En efecto, una pluralidad puede ser de tal índole que el supuesto de que *todos* sus elementos "existen conjuntamente" lleva a una contradicción, de modo que es imposible captar esa pluralidad como una unidad, como "una cosa acabada". A tales pluralidades las llamo *pluralidades absolutamente infinitas* o *inconsistentes.* (...)
>
> En cambio, si la totalidad de los elementos de una pluralidad se deja concebir sin contradicción como "estando reunida", de modo que es posible captarla conjuntamente como "una *cosa*", la llamo *pluralidad consistente* o "conjunto".[24]

Las paradojas, que bien podrían ser llamadas "paradojas cantorianas" tal como se denominan aquí los argumentos filosóficos contra la existencia de las totalidades que se han indicado, condujeron al desarrollo de las axiomatizaciones de teoría de conjuntos y, en particular, a la concepción iterativa de conjunto. En esta concepción, un conjunto sólo puede venir dado en virtud de operaciones conjuntistas que, luego, pueden aplicarse iterativamente sobre los conjuntos ya definidos. Una fórmula bien formulada, por ejemplo, no define un conjunto, esto es, el conjunto de todos los objetos que satisfacen la fórmula, si no es suponiendo que esos objetos *ya* forman parte de un conjunto. Por ejemplo, en el famoso axioma de separación de Zermelo (axioma III en su axiomatización de 1908) se establece que dada una fórmula φ se define el conjunto de todos los objetos x que satisfacen φ, $\{x: \varphi x\}$ si y sólo si hay un conjunto y, tal que $(x \in y \wedge \varphi x)$.[25] No toda expresión bien

---

[24] G. Cantor, carta a R. Dedekind del 3 de agosto de 1899. Citado y traducido por R. Torretti (1998, 51-52). Cantor hace esta distinción en vistas a la paradoja de Burali-Forti para sostener que hay totalidades que se encuentran definidas por una expresión verbal, pero que no pueden considerarse conjuntos (para la paradoja de Burali-Forti, cf. R. Torretti (1998, 465-468); la paradoja trata sobre la inexistencia del ordinal del conjunto de todos los ordinales).

[25] Cf. R. Torretti (1998, 78); los axiomas de Zermelo en 1908 son: (I) Axioma de determinación, dos conjuntos son idénticos si y sólo si poseen los mismos elementos; (II) Axioma de los conjuntos elementales, hay un conjunto vacío, $\varnothing$, que no posee elementos; (III) Axioma de separación, tal como se indicó; (IV) Axioma del conjunto potencia, dado un conjunto x, existe un conjunto P(x) que tiene como elementos todos los sub-conjuntos de x; (V) Axioma de unión, si existe el conjunto x, entonces existe el conjunto unión Yx compuesto por todos los elementos de los elementos de x; (VI) Axioma de selección, si hay un conjunto x que posee como elementos conjuntos no-vacíos disjuntos (esto es, sin elementos en común), entonces el conjunto unión Yx incluye un conjunto en el que se contienen como elementos uno y sólo un elemento de cada uno de

formada en algún lenguaje define un conjunto, por lo tanto, si es que el conjunto en cuestión no viene ya dado en la jerarquía conjuntista generada iterativamente por las operaciones especificadas en los axiomas. Así, no basta que exista la expresión "conjunto de todos los conjuntos" para que exista un conjunto de todos los objetos que satisfagan tal fórmula. No existe, en efecto este conjunto.

La forma en que von Neumann aborda esta cuestión es instructivamente diferente. En vez de declarar la inexistencia de ciertas totalidades (por ser inconsistentes), define los conjuntos como entidades que satisfacen ciertas condiciones y a las que les serán aplicables los usuales principios iterativos. Von Neumann no necesita exorcizar fuera de la existencia a las totalidades "demasiado grandes" para especificar la estructura conjuntista iterativa. La noción primitiva con la que se define "conjunto" en su axiomatización es la de función.[26] Se distinguen entre "cosas-I" y "cosas-II" (*Dinge-I, Dinge-II*). Las cosas-I son los argumentos sobre los que se puede aplicar una función, en adelante, los "argumentos". Las cosas-II son las funciones. Una función puede también ser argumento de otra función y se denomina una "cosa-I/II" o "función-argumento". El argumento que resulta del valor de la función f para el argumento 'a', se expresa como [f, a]. Aquí un "conjunto" se define del siguiente modo: sea un "dominio" una función f tal que, para todo argumento x, o bien [f, x] = 0, o bien [f, x] = 1. Aquí 0 y 1 son elementos distinguidos para indicar, intuitivamente que algo satisface la función f en cuestión o no la satisface ('A' y 'B' respectivamente en el original). Se dice de un dominio f que es un *conjunto* si y sólo si, f es una función-argumento. La expresión "$a \in f$" es una abreviatura de $[f, a] \neq 0$, en que f es una función y 'a' es un argumento. Intuitivamente, un conjunto queda seleccionado como: (i) la colección de objetos que satisfacen una cierta función (esto es, la colección de objetos tales que, para una función f determinada, [f, x] = 1), y que (ii) es argumento de otra función. De acuerdo a estas definiciones, cabe la posibilidad de que exista una cierta función f tal que no exista otra función g y $f \in g$. Una función f semejante selecciona una totalidad de elementos que

---

los sub-conjuntos no-vacíos disjuntos de x; (VII) Axioma de infinitud, existe un conjunto Z tal que: (i) $\varnothing \in Z$, y (ii) si $x \in Z$, entonces $\{x\} \in Z$ (lo que genera una secuencia infinita $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$, etcétera) (cf. R. Torretti (1998, 76-80, 471-472)

[26] Cf. para esta explicación R Torretti (1998, 90-101). Von Neumann formuló los axiomas de teoría de conjuntos en 1928 y constan de cinco grupos.

no constituye un conjunto. Es crucial para la idea de lo que hoy se entiende como una "clase propia" o "dominio propio" el axioma IV.2:

(IV.2) Una cosa-II *a* no es una cosa.I/II si y sólo si hay una cosa-II *b* tal que para cada cosa-I *x* existe un *y* que cumple las condiciones $[a, y] \neq A$ y $[b, y] = x$.[27]

De acuerdo a las definiciones dadas, el axioma IV.2 expresa que una cierta función f (*a* en la formulación de von Neumann) no es una función-argumento (y, por tanto, no es un conjunto) si y sólo si se cumple la siguiente condición: para cada objeto x, sea conjunto o no, hay una función g (*b* en la formulación de von Neumann) tal que a cada elemento y de f (esto es, a cada objeto y, tal que $[f, y] = 1$, o en otras palabras, tal que $y \in f$) le asigna x. En otras palabras, se dice de un dominio que es un dominio propio si hay una función que aplica ese dominio en el universo de todos los argumentos, compuesto por objetos y conjuntos. Un dominio deja de ser un conjunto cuando es "tan grande" como la colección de todos los objetos ordinarios compuesta por conjuntos y elementos de los conjuntos.[28] Recuérdese que al decir aquí que "no es un conjunto" se está diciendo que no es argumento para otra función y, por lo tanto, que no es elemento de otro conjunto. En otras palabras, un dominio "demasiado grande" queda automáticamente fuera de la estructura iterativa. No hay aquí ninguna necesidad de declarar a estos dominios "inconsistentes" para elaborar una teoría restringida a cierta clase de objetos matemáticos, a saber, los conjuntos, para los que se definen las propiedades usuales.

¿Qué se puede decir de estas diferentes axiomatizaciones por lo que respecta a las paradojas cantorianas que se están discutiendo aquí? En principio, las dos axiomatizaciones son equivalentes en el sentido de que todo lo que puede probarse con una de ellas, puede

---

27 Citado por R. Torretti (1998, 97).

28 Recuérdese que una "función" o "aplicación" se define como una relación entre dos colecciones de objetos A y B, tal que a elementos de A (llamado usualmente el dominio de la función), que pueden ser uno o varios, les asigna un y sólo un elemento de B (llamado usualmente el recorrido o dominio inverso de la función). Aquí se está diciendo que una función f no es una función-argumento, esto es, no es argumento de alguna otra función (no es conjunto) si y sólo si todos los elementos de f pueden ser aplicados en el dominio de todos los argumentos. No es necesario que la aplicación de los elementos de f en la colección universal de todos los argumentos sea tal que a cada elemento diferente de f le asigne un elemento diferente de tal colección universal (esto es, no es una función inyectiva), pero sí se requiere que cada elemento de la colección universal sea asignado a algún elemento de f (esto es, se trata de una función epiyectiva) Esto garantiza que el dominio definido por la función f debe ser al menos tan grande como la colección universal de todos los argumentos.

también probarse con la otra. No hay razones para preferir una de ellas por sobre la otra en lo que respecta a las cuestiones de teoría de conjuntos. Esto no impide que consideraciones desde un punto de vista externo a las puramente conjuntistas hagan una de ellas más preferible, por ejemplo, por razones de perspicuidad ontológica. La solución obvia sería sostener aquí que el "mundo" (y luego, por extensión, un "mundo posible") es una totalidad demasiado grande para ser un conjunto y debe tomarse como una clase propia, en el sentido que tiene esta expresión en NBG. Esta suposición, sin embargo, ha sido rechazada por algunos filósofos, como Christopher Menzel.[29] La razón fundamental para negar que el mundo pueda ser concebido como una clase propia en el sentido de NBG es que en estas concepciones conjuntistas la diferencia entre conjunto y clase viene dada no sólo por una consideración debida al "tamaño" de uno y otro tipo de totalidad sino también por una diferencia estructural. En la concepción iterativa los conjuntos sólo existen al ser "construidos" por operaciones sobre una colección inicial de elementos básicos (*urelements*: $\varnothing$ y cualesquiera otros átomos que sean dados): unión, pareo, conjunto potencia, separación y reemplazo. Dada la colección inicial de *urelements* y estas operaciones, se genera una jerarquía acumulativa de niveles, a cada uno de los cuales se asigna un número ordinal y contiene todas las colecciones que pueden ser formadas en los niveles previos en esta jerarquía. Aquí una clase propia está fuera de esta jerarquía acumulativa precisamente porque es el resultado último de este proceso de construcción de conjuntos. Anota Menzel:

> En términos más formales, V [esto es, la clase propia] es *ilimitada* (*unbounded*), esto es, contiene miembros de rango arbitrariamente alto (el rango de un objeto se define recursivamente como el menor ordinal más grande que los rangos de todos sus miembros); esto es, uno podría decir, de complejidad arbitrariamente alta en relación con las operaciones para la construcción de conjuntos.[30]

Así, una clase propia se habrá de distinguir no sólo por un tamaño desorbitado sino también por una estructura interna desorbitadamente compleja. Una clase propia se encuentra "más allá" de cualquier operación conjuntista con la que pudiese ser construida y, por eso, posee una naturaleza completamente diferente a la de un conjunto. Pues bien, considérese el

---

[29] Cf. Ch. Menzel (1986, 68-72).
[30] Ch. Menzel (1986, 70).

conjunto de todas las proposiciones verdaderas. Este conjunto está integrado únicamente por proposiciones, que no son conjuntos, por lo que tienen un rango 0. El conjunto de todas las proposiciones verdaderas tiene, entonces, un rango perfectamente claro de 1 (el rango inmediatamente superior al rango 0 en la estructura conjuntista). Resultaría que el conjunto de todas las proposiciones verdaderas no puede decirse una clase propia en el sentido de NBG.[31] Algo semejante podría decirse del conjunto de todos los estados de cosas, el conjunto de todos los objetos o el conjunto de todas las propiedades.

Creo, sin embargo, que estas peculiaridades de una clase propia en las axiomatizaciones de tipo NBG no son realmente un impedimento para el desarrollo de estrategias de ampliación. El problema de fondo que aquí se discute es si los resultados cantorianos deben tomarse como una limitación ontológica sustantiva en el "tamaño" de las entidades que puedan postularse, esto es, si es que el resultado de Cantor debe tomarse como un motivo suficiente para rechazar la existencia del mundo. En particular, ¿en qué sentido se debe decir que una cierta totalidad es "inconsistente", tal como lo ha sostenido Cantor? Pareciera que una totalidad es "inconsistente" cuando, dada esa totalidad y dadas las operaciones conjuntistas habituales –por ejemplo, la operación de conjunto potencia– se puede deducir una inconsistencia explícita. En todos los argumentos cantorianos que se han considerado se ha podido apreciar exactamente la misma estructura. La postulación de cierta totalidad *como un conjunto* permite deducir una conclusión en abierta contradicción con el teorema de Cantor. Cuando se habla de una totalidad "inconsistente" se está hablando de que existe un motivo para rechazar la postulación de tal totalidad. Ya se ha visto cómo von Neumann ha evitado tener que hablar de tales totalidades "inconsistentes" mediante el procedimiento de diferenciar los conjuntos, como parte de la estructura iterativa, de las "clases propias". La forma en que se han definido las clases propias en NBG, sin embargo, está restringida al tipo de paradojas que se han tenido directamente en vista para la axiomatización de teoría de conjuntos. Las dificultades en cuestión no tenían que ver con problemas ontológicos sino con ciertos conjuntos peculiares, tal como el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, el conjunto de todos

[31] Una conclusión semejante en P. Grim (1986, 187-188). Grim hace anotar, además, que una clase propia, que no puede ser incluida en otras clases más "grandes", no es aceptable para un teórico que quiere hablar de la clase de todas las verdades, pues, por ejemplo, este teórico estará interesado en afirmar que la clase de todas las proposiciones verdaderas forma parte de la clase de todas las proposiciones.

los conjuntos, el ordinal de todos los ordinales, etc. Estas totalidades problemáticas para la teoría intuitiva se pueden tratar de una manera satisfactoria con los axiomas de ZF o de NBG, y, por consiguiente, con la concepción iterativa que se expresa en ellos.

Puede afirmarse, sin embargo, de una manera igualmente legítima, que los problemas ontológicos que se discuten aquí, los que se han denominado paradojas o aporías cantorianas, son dificultades que obligan a introducir limitaciones en el alcance de los axiomas. Es efectivo que Cantor pensaba en los principios conjuntistas –los principios intuitivos– como las formas universales en que puede ser pensada cualquier totalidad actual o posible. Esto es algo, sin embargo, que no tiene por qué admitirse si es que hay totalidades que tienen un valor ontológico fundamental y no se adecuan a tales principios. No importa para esto si es que estas totalidades no pueden ser consideradas "clases propias" de acuerdo a lo que se pudo prever en NBG. Esto es, si sostener que cierta totalidad *es* un conjunto lleva a una contradicción, entonces, puede rechazarse que exista tal totalidad, pero también puede rechazarse que se trate de un *conjunto*. Las paradojas cantorianas consideradas hasta ahora pueden pensarse como dependiendo de una premisa de este tenor, que es una paráfrasis de la tesis (I) tal como se indica arriba:

(I') Hay una totalidad A, y

(I'') A es un conjunto

Aquí se rechaza la tesis (I'') en virtud del argumento cantoriano, pero no se rechaza la tesis (I') según la que existe una cierta totalidad A. Ahora bien, podría sostenerse que esta maniobra es poco razonable y *ad hoc*, esto es, motivada sencillamente para evitar conclusiones ontológicas incómodas. En efecto, podría decirse que los principios conjuntistas recogidos en los axiomas son plausibles independientemente o, al menos, parecen ser independientemente plausibles. Parece natural pensar que dada una colección de objetos, se puede definir la colección de todas las colecciones formadas de elementos de la colección inicial. Parece natural pensar también que, no importa el tamaño de la colección de que se trate, la nueva colección definida mediante la operación de conjunto potencia tendrá una cardinalidad mayor. Así acaece cuando la colección es finita y nada parece impedir que se generalice esta tesis para colecciones infinitas de objetos. ¿Por qué no pueden aplicarse estos principios a totalidades como el mundo? ¿Qué tipo de veda o prohibición puede impedir que tratemos de pensar en el mundo con los mismos principios con los que se piensa cualquier colección?

La respuesta que se está proponiendo aquí es que la negación de que ciertas totalidades sean conjuntos, aún cuando esto no sea una alternativa contemplada por las axiomatizaciones existentes, es la salida más razonable para una situación teóricamente muy insatisfactoria. Considérese nuevamente la situación dialéctica. La postulación de que existe el mundo *como* un conjunto de todas las proposiciones verdaderas, o el conjunto de todos los estados de cosas o todos los objetos, conduce a una contradicción explícita con el teorema de Cantor, dado un principio generador para estas totalidades que permite introducir elementos en el conjunto en cuestión por cada sub-conjunto de éste. Sería irrazonable aquí declarar falsa *toda* la teoría de conjuntos, por haber conducido a este resultado.[32] Sería igualmente irrazonable declarar que no existe el mundo dado este resultado en contradicción con el teorema de Cantor. ¿Qué opción queda? Quedan abiertas las estrategias de limitación o la salida que se defiende aquí: sostener sencillamente que el mundo no es un conjunto. Se verá más adelante que las estrategias de limitación imponen tales restricciones que no es verosímil creer que puedan ofrecer respuestas a todas las paradojas cantorianas y, en especial, a las paradojas cantorianas de alcance ontológicamente más fundamental.

La principal justificación independiente que tiene la solución general que se propone es que los axiomas de teoría de conjuntos, y la concepción iterativa que expresan, no son *naturales*. No se trata de una serie de postulados obvios para el sentido común o, si se quiere, no se trata de una serie de postulados que sean todos ellos obvios para el sentido común. Si el axioma de conjunto potencia puede resultar "natural" en el sentido de parecer

[32] Una idea de este estilo, por ejemplo, ha sido atender a teorías de conjuntos no estándar en las que no vale el axioma de conjunto potencia o, al menos, no vale con toda generalidad (cf. Ch. Menzel (1986, 71); P. Grim (1986, 188-190)). Por supuesto, desde un punto de vista puramente formal tiene interés considerar qué acaece cuando se elimina algún postulado dentro de un conjunto de postulados independientes, pero no hay motivos para pensar que *toda* teoría de conjuntos deba pensarse sin axioma de conjunto potencia. Aún cuando existan estos sistemas no estándar, esto no es impedimento para la existencia de los sistemas estándar en los que sí vale este axioma y se siguen los resultados desastrosos en comento. Para evitar las paradojas habría que sostener que la única teoría de conjuntos válida es sin conjunto potencia y esto es completamente irrazonable. Los sistemas estándar son los que dan el paraíso de Cantor, por lo demás, así es que es ilusorio pensar que los matemáticos van a renunciar a ellos por los pruritos de un metafísico.

un supuesto perfectamente aceptable para cualquier persona racional, sea o no matemáticamente sofisticada (lo que también puede suceder con el axioma de extensionalidad o determinación, con el axioma de pareo o con el axioma de unión), no sucede lo mismo con otros axiomas, como el de separación, el de reemplazo, el de infinito, tal vez también con el axioma de elección, ni tampoco con la postulación de una entidad matemática misteriosa: $\varnothing$ (cuya utilidad formal para que las operaciones conjuntistas queden siempre definidas es obvia, pero que no puede reclamar la misma obviedad para el sentido común). La única razón que parece justificar un axioma como el de separación es la de evitar el surgimiento de paradojas como la de Russell. Recuérdese que el axioma de separación permite introducir el conjunto de todos los objetos x que satisfacen una condición φ $\{x: \varphi x\}$ si y sólo existe un conjunto y, tal que $(x \in y \wedge \varphi x)$. Esto es, un conjunto sólo se da, si es que existe ya otro conjunto. Los conjuntos sólo existen –de acuerdo a la teoría– dentro de la jerarquía conjuntista, como elementos de otros conjuntos. Esto no es un supuesto *natural* de ninguna manera. Es una forma razonable de estipular una teoría consistente, hasta donde sabemos, que recoge todas las intuiciones centrales de Cantor y que permite habitar su paraíso con razonable confianza, pero no es una serie de principios sobre *toda* colección pensable como tal sin contradicción. Las estructuras conjuntistas están diseñadas para ciertas finalidades teóricas específicas. En tales estructuras se hacen pensables totalidades infinitas de diferentes cardinalidades y se hace pensable una aritmética de infinitudes que, de algún modo, son diferentes y conmensurables entre sí. Pero es claro que no se trata de *los* principios que hacen pensable toda colección de objetos en general. De hecho, no pensamos en colecciones de objetos ordinariamente como parte de la estructura conjuntista. Pues bien, si esto es así, ¿es tan difícil de aceptar que el mundo no sea un conjunto, esto es, un objeto de *esta* teoría?

Lo que se está afirmando cuando se dice que el mundo no es un conjunto es sencillamente que no se le debe aplicar el aparato completo de esa teoría. Un “conjunto” es un tipo de entidad que satisface requerimientos bien específicos y no cabe pensar el mundo como una entidad de esa especie característica. No es tampoco el mundo una clase propia en el sentido de NBG, pero puede sostenerse que la negación de que el mundo sea un “conjunto” es una maniobra inspirada en su espíritu en von Neumann, aunque –como es obvio– no pueda atribuírsele esta idea en particular. El punto crucial es que no es razonable sostener que los axiomas de teoría de conjuntos son la medida de lo que hay en cielos y tierra. No es razonable sostener que una entidad sólo puede existir si es que ocupa un lugar en la jerarquía conjuntista, esto es, si es que ha sido generada por operaciones conjuntistas. No es verosímil sostener que el axioma de conjunto potencia va a ser la clave de bóveda de nuestra ontología fundamental, funcionando como el discriminador de lo existente. La postulación del mundo como totalidad de todos los entes o como totalidad de todos los estados de cosas (y la postulación correlativa de la totalidad de todas las proposiciones verdaderas) tiene suficientes garantías independientes como para que debamos rechazar todo razonamiento en su contra como una *reductio* de los supuestos que conducen a tal resultado.[33] Esto implica que la teoría de conjuntos es una forma de estructura matemática más, formalmente muy simple y poderosa (y por ello, interesante para el matemático), pero no es nuestra ontología fundamental. Por supuesto, esto parece ir en contra del deseo expreso de Cantor, pero el proyecto original de Cantor fracasó ya de todos modos.[34]

3.2. *Estrategias de restricción*

Tal como se ha visto, las paradojas cantorianas surgen de dos supuestos. Por un lado se supone que existe cierta totalidad determinada A (supuesto (I)) y después se indica un principio generador que multiplica los elementos de esa totalidad A para hacerla tan "grande" como el conjunto potencia de A (supuesto (II)). Las estrategias de ampliación buscan negar el supuesto (I), rechazando que la totalidad en cuestión sea un conjunto, sin tener que rechazar la existencia de la totalidad A. Estas otras estrategias de limitación, en cambio, buscan restringir de una manera fundada la operación del principio generador que multiplica los elementos de A. Considérese, por ejemplo, lo que acaece en el argumento cantoriano (A). Se postula la existencia del conjunto A de todas las verdades. Para cada

[33] Es instructivo en este respecto comparar estas consideraciones con lo defendido recientemente por T. Williamson (2003). Williamson aboga por la necesidad de la cuantificación irrestricta sobre "todo" como un requerimiento de nuestra racionalidad, a pesar de los pruritos cantorianos de los lógicos. Señala: "¿Qué tiene que ver esto con la generalidad irrestricta? Muestra que si generalizamos sobre todo, no estamos generalizando simplemente sobre los miembros de algún conjunto o clase, tal como los conjuntos y las clases son ahora concebidas usualmente." (425)

[34] Cf. R. Torretti (1998, 63-70). Cantor dejó sin resolver los dos problemas de los que depende la suficiencia de la aritmética transfinita cantoriana para "medir todas las multitudes del universo" (63): el problema del continuo y el problema del buen orden. El primero se ha mostrado indemostrable desde los restantes axiomas conjuntistas usuales, tal como mostró Cohen en 1963. El segundo se ha podido resolver introduciendo el axioma de selección que ha resultado menos intuitivo para algunos que los restantes postulados de la teoría conjuntista.

sub-conjunto de A existe una nueva proposición verdadera que también debe ser una verdad y, por lo tanto, debe ser parte de A. A es tan grande como su propio conjunto potencia. El principio generador aquí funciona formulando proposiciones verdaderas por cada sub-conjunto del conjunto A. El caso del argumento cantoriano (B) es muy similar a éste, sólo que las proposiciones verdaderas deben aquí ser sustituidas por estados de cosas o hechos. En el caso del argumento cantoriano (F), relativo al conjunto de todas las entidades, por otra parte, el principio generador está explícitamente especificado como el principio mereológico según el cual dadas dos entidades x e y, existe la suma mereológica (x + y). Pues bien, las estrategias de limitación son formas de impedir que se agreguen nuevas entidades al conjunto en cuestión por cada sub-conjunto de éste. Para esto es indispensable que la totalidad que se ha definido sea restringida en un sentido preciso.

Las estrategias de restricción buscan típicamente efectuar cierta "estratificación" de los elementos que van a conformar la totalidad en cuestión, de manera que los nuevos elementos que puedan ser generados por cada sub-conjunto queden fuera al corresponder a otro "estrato" más alto. La tradicional teoría de los tipos de Russell es una forma de efectuar esta estratificación. Se considerará la cuestión en primer lugar respecto del conjunto de todas las proposiciones verdaderas. Se define, en primer lugar, un conjunto de todos los objetos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (recuérdese que esta suposición está ya afectada por el argumento cantoriano (F)) y un conjunto de todas las propiedades de primer orden $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (esta suposición está afectada por el argumento cantoriano (G)). Se entienden aquí como "propiedades de primer orden" a las propiedades, posiblemente n-ádicas, que se atribuyen a objetos. Dados estos conjuntos iniciales de objetos y propiedades se puede definir un conjunto de todas las proposiciones de estrato-0 que sólo versan sobre propiedades y relaciones entre objetos, $\{P_1x_1, P_1x_2, \ldots, P_1x_n, P_2x_1, P_2x_2, \ldots, P_2x_n, \ldots, P_nx_1, P_nx_2, \ldots, P_nx_n\}$. Un sub-conjunto de estas proposiciones de estrato-0 es el conjunto de todas las proposiciones verdaderas. Sea A. Pues bien, es obvio que a cada sub-conjunto de A se le puede asignar una proposición verdadera. La idea es definir el estrato de tales proposiciones de manera que queden fuera del conjunto A. Se definirá ahora al estrato-1 como el estrato de todas las proposiciones que versan sobre proposiciones del estrato-0. Dada la manera en que se formuló el argumento A arriba, a un sub-conjunto dado de A, sea $\{p_1, p_2\}$ se le puede asignar una proposición verdadera como $p_1 \in \{p_1, p_2\}$. Si aquí p_1 y p_2 son proposiciones de estrato-0, esto es, son proposiciones que están enunciando que ciertos objetos poseen ciertas propiedades de primer orden, la proposición que enuncia que p_1 pertenece al conjunto compuesto por las proposiciones p_1 y p_2 es una proposición de estrato-1, pues versa sobre proposiciones de estrato-0 (nótese que para esto no es necesario decir que el conjunto cuyos elementos son de estrato-0 debe ser de un estrato más alto. La estratificación sólo afecta a las proposiciones y no a las entidades de las que tratan esas proposiciones; aquí un conjunto es sencillamente una entidad más). Luego, pueden ser definidas proposiciones de estratos más altos. Las proposiciones de estrato-2 son proposiciones que versan sobre proposiciones de estrato-1. Las proposiciones de estrato-3 versan sobre proposiciones de estrato-2. Etcétera. Por cada uno de estos estratos, por otra parte, es necesario definir un conjunto particular de propiedades de diferentes niveles. El conjunto de propiedades de primer orden que sirve para definir el estrato-0 de proposiciones está compuesto sólo por propiedades que se predican de objetos, propiedades de primer nivel. Las propiedades que sirven para definir el estrato-1 es un conjunto de propiedades que se predican de las proposiciones de estrato-0, como, por ejemplo, la propiedad de ser un elemento del conjunto $\{p_1, p_2\}$, esto es, $[\lambda x\ (x \in \{p_1, p_2\})]$, que es una propiedad de segundo nivel. Luego habrá propiedades de tercer nivel que se predican de proposiciones de estrato-2 (que a su vez, predican propiedades de segundo nivel a proposiciones de estrato-1). Etcétera.

De esta forma, al parecer, se resuelve la paradoja cantoriana (A). El problema, sin embargo, es que esta solución no sirve de nada si es que no se resuelven también las restantes paradojas cantorianas (B), (F) y (G). Al resolver al problema local del conjunto de todas las proposiciones verdaderas no se ha salvado todavía el “mundo”, pues esta solución debe hacer apelación al conjunto de todos los objetos, que está afectada por el argumento (F), y debe hacer apelación al conjunto de todas las propiedades, que está afectado por el argumento (G). Además, subsiste el problema respecto al conjunto de todos los estados de cosas, esto es, el argumento (B). Recuérdese que debe existir esta totalidad de todos los estados de cosas si es que han de existir *truthmakers* para todas las proposiciones verdaderas. Sucede, entonces, que si se quiere limpiar de aporías a la noción de “mundo” no sirve implementar una solución de estratificación *local*. No va a ser de utilidad estratificar los estados de cosas sin estratificar las proposiciones, los objetos y las propiedades. No sirve, en fin, estratificar a los objetos sin estratificar las propiedades, los estados de cosas y las proposiciones. La estrategia de restricción por estratificación sólo puede ser *global.* De otro modo, las paradojas cantorianas, arrojadas de un área, reaparecerán en otra.

En el caso de los objetos, tendrá que suponerse que hay un conjunto de átomos de estrato-0. Las sumas mereológicas de átomos tendrán estrato-1. Las sumas mereológicas de entidades de estrato-1 serán de estrato-2. Etcétera. Algo análogo tiene que realizarse con las propiedades. Habrá un nivel de propiedades simples, el estrato-0. Las propiedades estructurales formadas por complexión de propiedades de estrato-0 serán las propiedades de estrato-1. Luego, en general, las propiedades formadas por propiedades de estrato [n – 1] serán de estrato n. Cuando se llega a un estado de cosas, por otro lado, habrá que definir un estrato-0 de estado de cosas básicos o atómicos, que han de estar constituidos por objetos de estrato-0 y propiedades de estrato-0. Los estratos superiores estarán constituidos por estados de cosas de estratos más bajos. Etcétera. Todo esto debe luego reaparecer en la estratificación de las proposiciones. El resultado es un esquema general de una inmensa complejidad. Considérese lo que sucede con ciertos tipos de estados de cosas. Por ejemplo, muchos filósofos consideran las relaciones causales como estados de cosas que relacionan dos estados de cosas.[35] El hecho de que un cortocircuito cause el incendio de una casa es una cierta relación entre el estado de cosas consistente en darse tales y cuales eventos en un circuito eléctrico y el estado de cosas consistente en la combustión de una casa. Si el estrato del estado de cosas consistente en el cortocircuito es n, entonces el estrato de la relación causal entre el cortocircuito y el incendio debe ser, por lo menos, de [n + 1]. Esto es importante, porque si se va a indicar un conjunto de *todos* los estados de cosas y los estados de cosas en cuestión van a ser estados de cosas "básicos" o estados de cosas "atómicos", entonces no van a aparecer ahí las relaciones causales. Si el mundo es el conjunto de *todos* los hechos o estados de cosas, y se pretenden evitar las paradojas cantorianas mediante la estrategia de restricción, entonces el mundo descrito estará limitado al estrato-0 de hechos, pero resultará entonces que en el mundo no van a aparecer las relaciones causales. Esto, por supuesto, tiene sin cuidado a filósofos cuya concepción de la causalidad es anti-realista,

---

[35] Por ejemplo, cf. M. Tooley (1987); D. M. Armstrong (1997, 202-219; 2004, 125-144); D. H. Mellor (1995).

pero muchos otros filósofos sostienen que los hechos causales del mundo son hechos ontológicamente básicos y para ellos esto es profundamente insatisfactorio.

Podría, sin embargo, sostenerse que esto no es una dificultad mayor. Podría decirse, en efecto, que el estrato de estados de cosas al que debe aludirse para la definición del mundo como conjunto de todos los hechos debe ser lo suficientemente alto como para incluir las relaciones causales, lo que no es un nivel arbitrariamente alto. Esto no es tan simple, sin embargo. Cuando se habla de la relación causal entre un cortocircuito y el incendio de una casa, en efecto, se está hablando de un estado de cosas de un estrato inmensamente alto. Una casa es un objeto de un estrato inmensamente alto, pues es la suma mereológica de entidades de estrato inmensamente alto (una molécula es ya probablemente una entidad de estrato inmensamente alto). Para poder incluir en el mundo la relación causal entre el cortocircuito y el incendio de una casa tenemos que elevar el estrato de estados de cosas a un nivel muy elevado. ¿Qué tan elevado? No es nada claro. ¿Qué tan compleja es una casa como entidad? ¿Cuántas partes posee una casa?

Esto es quizás lo que resulta más dudoso de la estrategia de restricción: si ha de tener sentido debe aplicarse globalmente a proposiciones, estados de cosas, objetos y propiedades (y otras categorías ontológicas si es que se dan). Pero para esto debe tener sentido el que exista un estrato de composición mereológica preciso para cada entidad de las que pueblan el mundo y con las que tenemos contacto ordinario. Para asignar tal estrato definido, es necesario identificar un nivel básico en el que sólo se den "átomos" sin partes. De la misma manera, se hace necesario postular un nivel básico de propiedades no estructuradas. Sin embargo, es obvio que éstas son tesis ontológicas dudosas, en el mejor de los casos. No es sensato pensar que para resolver el problema de las paradojas cantorianas tengamos que salir al mundo a buscar "átomos" reales. Si se fuese a seguir esta estrategia, habría que suponer que, dadas las paradojas cantorianas, entonces *tiene* que existir un estrato de átomos en el mundo, pues de otro modo no podemos hacer inteligible la idea misma de *mundo*. Esto es lo que no parece razonable. No se quiere decir con esto que no pueda surgir en el futuro alguna argumentación filosófica definitiva e independiente para la postulación de átomos en el mundo, o que, lo que puede parecer más difícil, se descubra un átomo (esto es, un objeto material sin partes) mediante investigación empírica. La cuestión es que no parece una estrategia apropiada hacer descansar la defensa de la inteligibilidad de la noción de "mundo" descanse en el éxito eventual de semejantes especulaciones.

4. **Conclusiones**

Se ha mostrado que las paradojas cantorianas no ofrecen ventajas particulares para alguna de las teorías modales. Los problemas que derivan de las paradojas cantorianas, a pesar de que han concentrado bastante atención como dificultades de principio de diferentes teorías actualistas, usualmente contra una u otra teoría en particular, no son cuestiones de especial urgencia. El problema de fondo es de carácter absolutamente general y afecta a cualquiera que pretenda utilizar la noción de "mundo" en su ontología. Incluso un filósofo que rechace toda modalidad metafísica, tendrá que abordar esta cuestión. No se trata, por tanto, de una dificultad específica de las concepciones modales y, además, no es una dificultad que permita otorgar ventajas o signifique desventajas para alguna teoría modal. La metafísica modal, en resumen, bien puede poner entre paréntesis esta cuestión para concentrar sus energías en las cuestiones que tienen verdadera relevancia para su desarrollo.

Por otra parte, cuando se trata de abordar la cuestión general, la estrategia de ampliación es la que parece ser la más recomendable. Esta estrategia postula sencillamente desatender las paradojas cantorianas. La teoría de conjuntos debe tomarse como una teoría matemática interesante, pero no como el criterio ontológico último de lo existente en cielos y tierra. Seguramente es necesario tener más claridad sobre cuál es el verdadero alcance de las estructuras conjuntistas y, también, más claridad sobre qué es una entidad matemática en general, para poder afirmar con seguridad que los resultados cantorianos tienen un valor restringido. Falta mucho para conseguir esta claridad, naturalmente, pero esto no obsta para postular la estrategia de ampliación como la más verosímil, dada el conocimiento que poseemos hoy sobre estas cuestiones[36].

José Tomás Alvarado Marambio

Pontificia Universidad Católica de Chile

jose.alvarado.m@ucv.cl

[36] Este trabajo ha sido redactado en ejecución del proyecto de investigación Fondecyt 1070339 (Chile). Agradezco los útiles comentarios de un evaluador anónimo de esta revista.

Bibliografía

Adams, R. M. (1979) 'Theories of Actuality' en M. J. Loux (ed.), *The Possible and the Actual. Readings in the Metaphysics of Modality,* Ithaca: Cornell U.P.

Alvarado, J. T. (2006), '¿Qué es el espacio ontológico modal?', *Philosophica* 29, 7-44.

Armstrong, D. M. (1989), *A Combinatorial Theory of Possibility,* Cambridge: C.U.P.

Armstrong, D. M. (1997), *A World of States of Affairs,* Cambridge: C.U.P.

Armstrong, D. M. (2004), *Truth and Truthmakers,* Cambridge: C.U.P.

Bringsjord, S. (1985), 'Are There Set Theoretic Possible Worlds?', *Analysis* 45, 64

Bringsjord, S. (1989), 'Grim on Logic and Omniscience', *Analysis* 49, 186-189.

Carnap, R. (1947), *Meaning and Necessity,* Chicago: University of Chicago Press.

Chihara, Ch. (1998), *The Worlds of Possibility,* Oxford: Clarendon Press.

Cresswell, M. J. (1979), 'The World is Everything That is the Case', en M. J. Loux (ed.), *The Possible and the Actual,* 129-145.

Davies, M. (1981), *Meaning, Quantification and Necessity,* London: Routledge.

Divers, J. (2002), *Possible Worlds,* London: Routledge.

Forrest, P. (1986), 'Ways Worlds Could Be', *Australasian Journal of Philosophy* 64, 15-24.

Grim, P. (1984), ‘There is no Set of All Truths’, *Analysis* 44, 206-208.

Grim, P. (1986), ‘On Sets and Worlds: A Reply to Menzel’, *Analysis* 46,186-191.

Grim, P. (1997), ‘Worlds by Supervenience: Some Further Problems’, *Analysis* 57, 146-151.

Jeffrey, R. C. (1965), *The Logic of Decision,* Chicago: McGraw-Hill.

Jubien, M. (1980), ‘Problems with Possible Worlds’, en D. F. Austin (ed.), *Philosophical Analysis,* Dordrecht: Kluwer, 299-322.

Kaplan, D. (1995), ‘A Problem in Possible-World Semantics’, en W. Sinnott-Armstrong, D. , D. Raffman & N. Asher (eds.), *Modality, Morality and Belief,* Cambridge: C.U.P., 41-52.

Lewis, D. (1973), *Counterfactuals,* Oxford: Blackwell.

Lewis, D. (1986), *On the Plurality of Worlds,* Oxford: Blackwell.

Melia, J. (2001), ‘Reducing Possibilities to Language’, *Analysis* 61,19-29.

Mellor, D. H. (1995), *The Facts of Causation,* London: Routledge.

Menzel,Ch. (1986), ‘On Set Theoretic Possible Words’, *Analysis* 46, 68-72.

Plantinga, A. (1974), *The Nature of Necessity,* Oxford: Clarendon Press.

Plantinga, A. (2003) ‘Actualism and Possible Worlds’, en *Essays in the Metaphysics of Modality,* Oxford: Oxford U.P., 103-121.

Potter, M. (2004) *Set Theory and its Philosophy,* Oxford: Oxford U.P.

Raffman & N. Asher (eds.), (1995) *Modality, Morality and Belief,* Cambridge: C.U.P.

Roy, T. (1995) “In Defense of Linguistic Ersatzism” *Philosophical Studies* 80, 217-242

Sider, Th. (2002) ‘The Ersatz Pluriverse’, *The Journal of Philosophy* 99, 279-315.

Stalnaker, R. (2003) ‘Possible Worlds’, en *Ways a World Might Be. Metaphysical and Anti-Metaphysical Essays,* Oxford: Clarendon Press, 25-39

Tooley, M (1987). *Causation. A Realist Approach,* Oxford: Clarendon Press

Torretti, R. (1998) *El paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía matemática,* Santiago: Editorial Universitaria.

Williamson T. (2003) ‘Everything’, en J. Hawthorne & D Zimmerman (eds.), *Philosophical Perspectives* 17, 415-465